

Hat et Spectre

N. Pytheas Fogg

FRUMAM

2024

1 Hat

- Polykite et définition
- Hat continuum
 - Turtle (polykite)
 - Chevron (polyiamond)
 - Conch (polyiamond)
 - Spectre
 - Déformation de pavages
- Résultat principal
 - Existence d'un pavage infini
 - Apériodicité
- Autres résultats et preuves alternatives

2 Spectre

- The tile
- Résultat
 - Lien avec les chapeaux et tortues
- Apériodicité
 - Hexagones marqués
 - Structure hiérarchique
- Pavabilité

Les (bonnes) références

Hat et Turtle.

- *An Aperiodic Monotile*, D. Smith, J. Myers, C. Kaplan et C. Goodman-Strauss 2023 (article d'origine, preuves lacunaires)
- *Tilings and Patterns, section 3*, J. Kari 2023 (notes de cours de Jarkko, preuve plus détaillée)
- *An alternative proof for an aperiodic monotile*, S. Akiyama et Y. Araki 2023 (preuve avec les barres d'Ammann)
- *Dynamics and topology of the Hat family of tilings*, M. Baake, F. Gähler et L. Sadun 2023 (des histoires de cohomologie et coupe-et-projection)

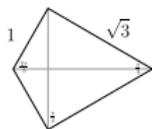
Spectre.

- *A chiral aperiodic monotile*, D. Smith, J. Myers, C. Kaplan et C. Goodman-Strauss 2023 (article d'origine, preuves très lacunaires)

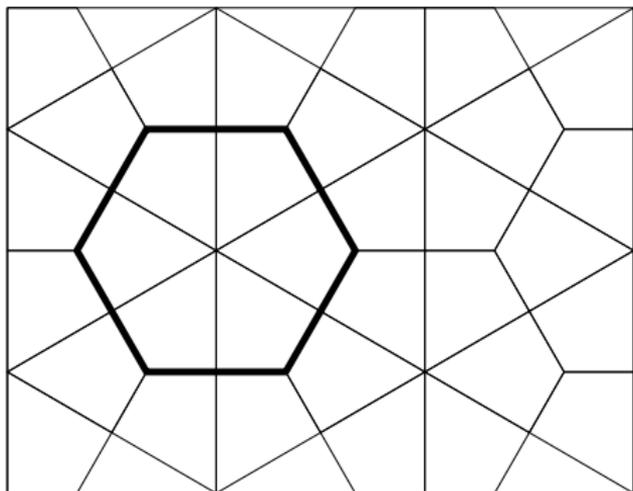
Bonus.

- *Planar aperiodic tile sets: from Wang tiles to the Hat and Spectre Monotiles*, T. Bruneau et M. Whittaker, 2023 (un peu d'histoire du domaine)

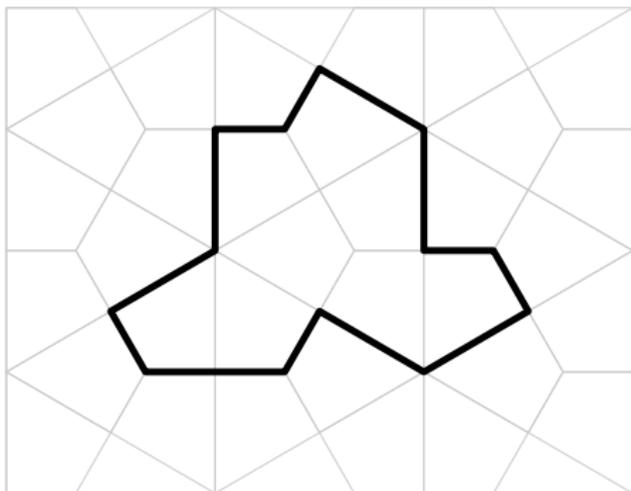
Kite



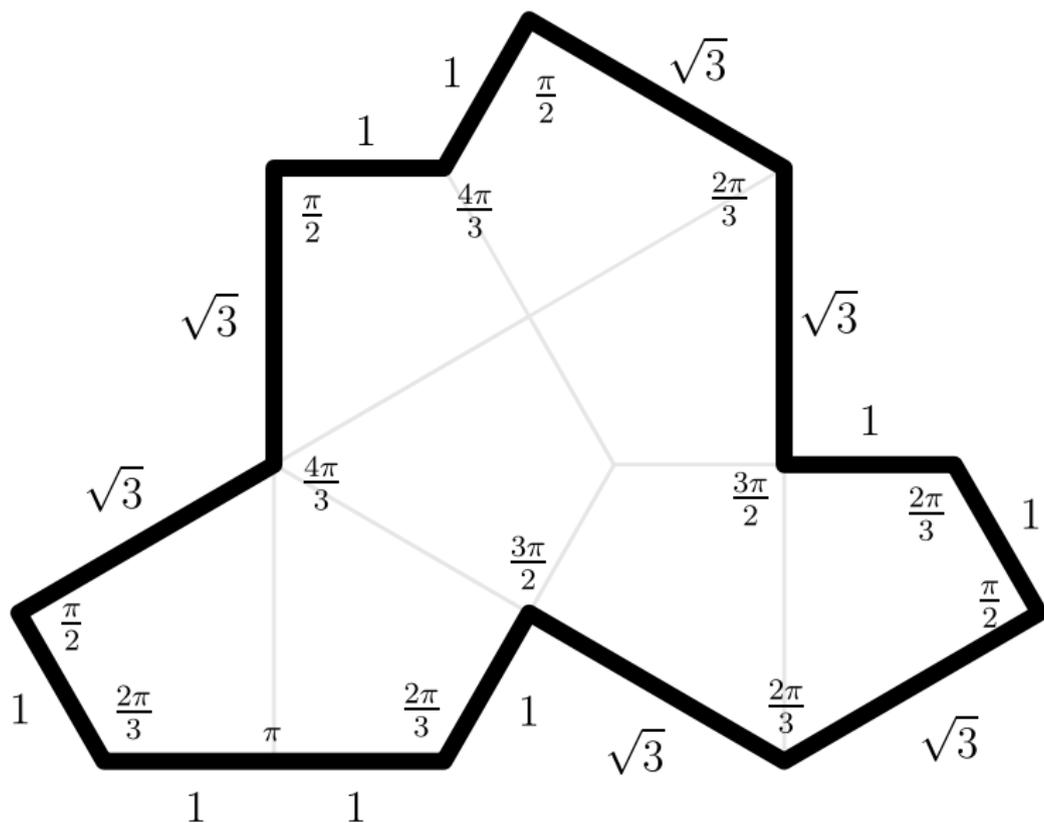
Kite grid



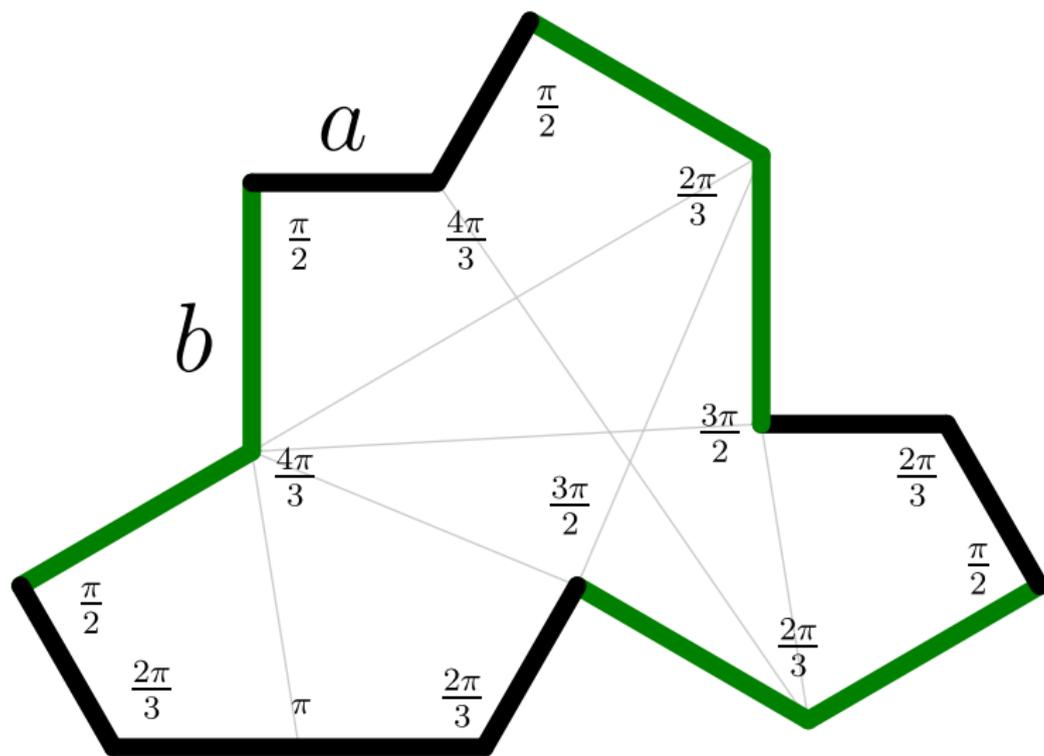
Hat polykite

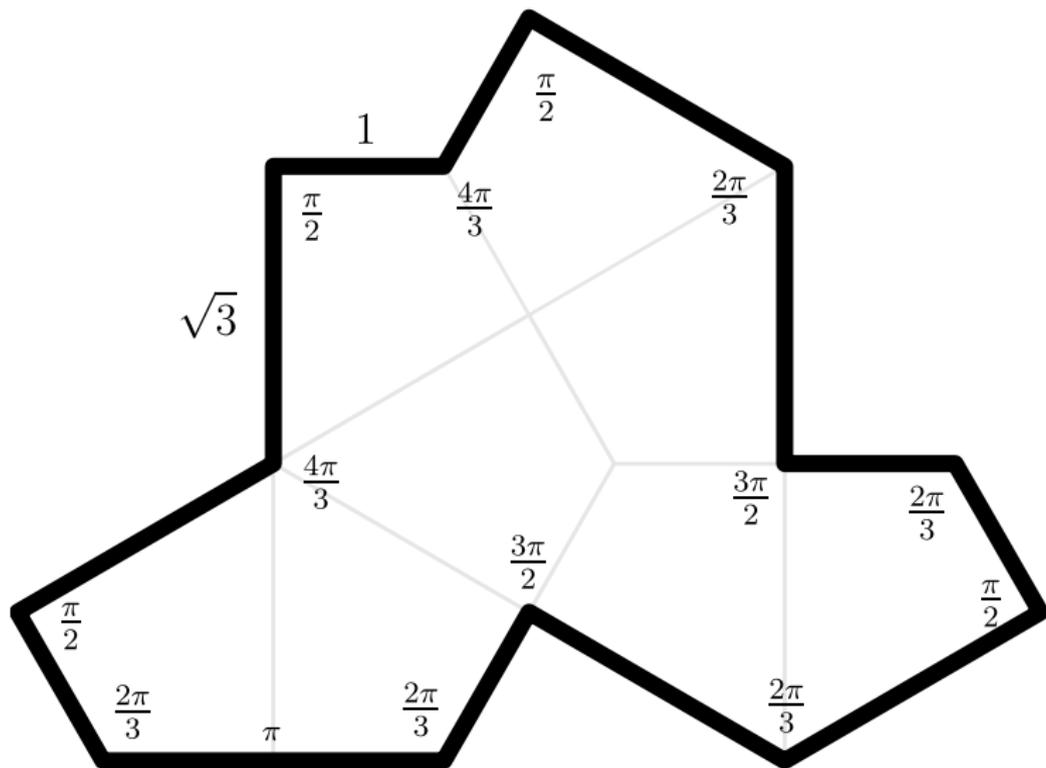


Def. Hat est le 14-gone suivant :

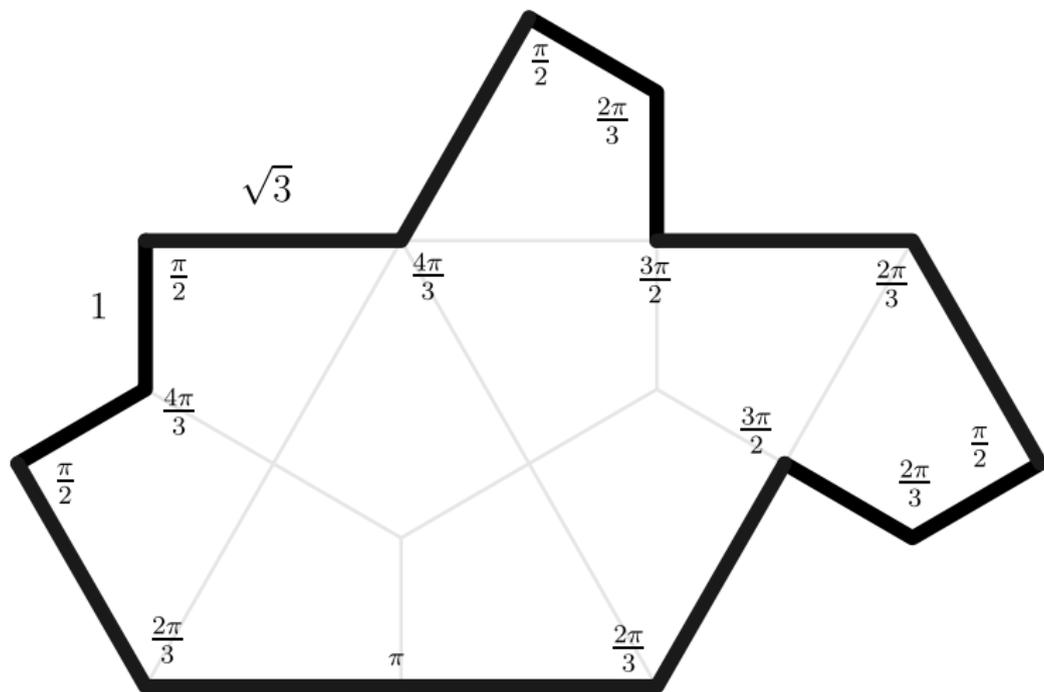


Def. $\text{Tile}(a, b)$ est le 14-gone suivant

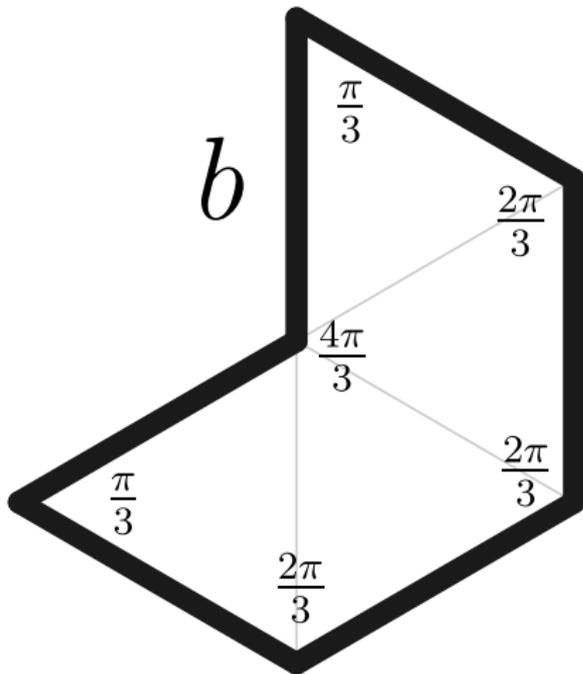


$$\text{Hat} := \text{Tile}(1, \sqrt{3})$$


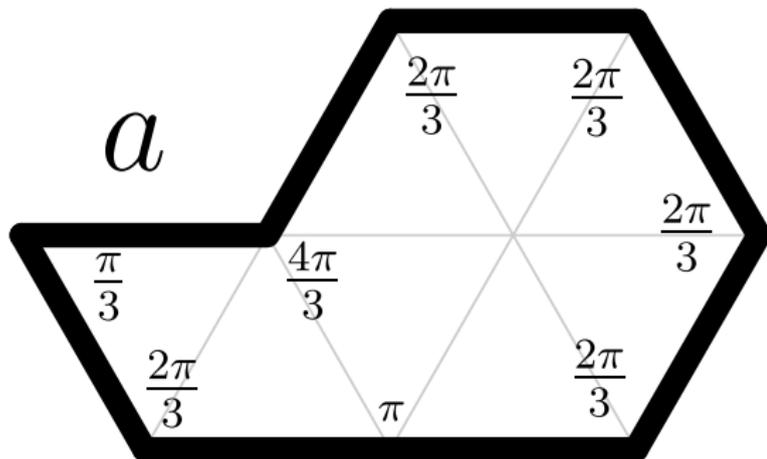
Turtle := Tile($\sqrt{3}$, 1)



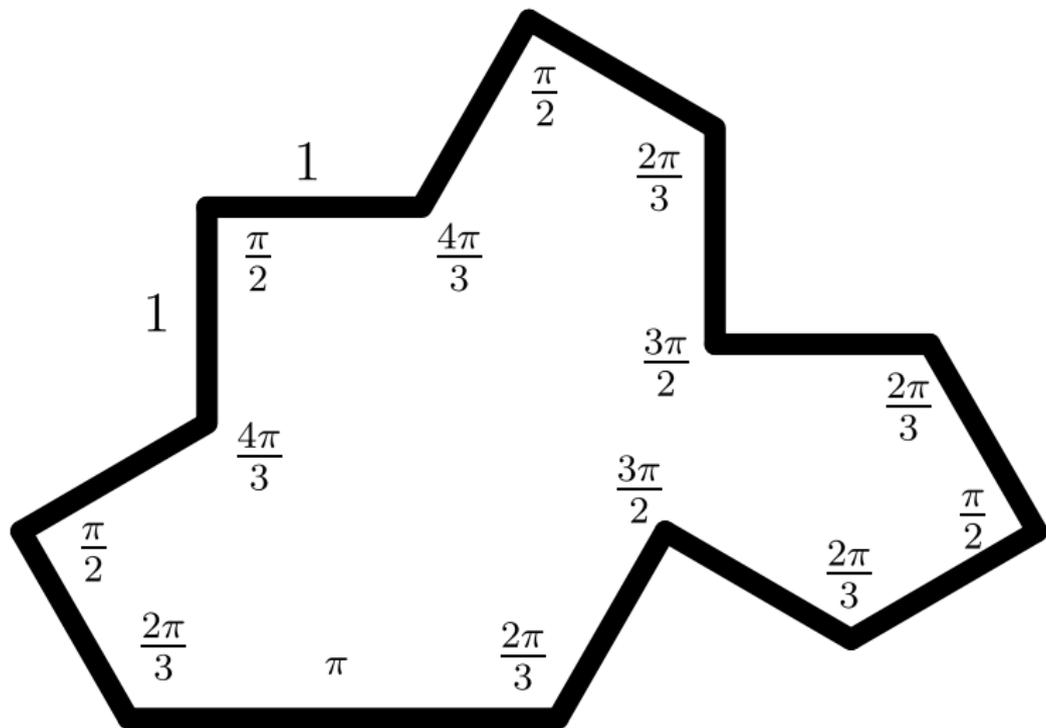
Chevron := $\text{Tile}(0, b)$



Conch := Tile($a, 0$)



Spectre := Tile(1, 1)



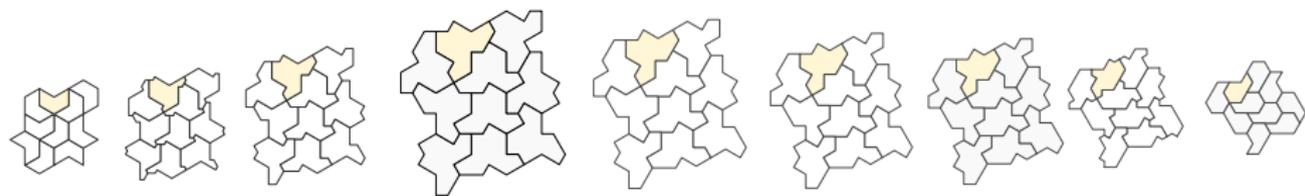
Déformation de pavage

Lemma

Soit \mathcal{T} un pavage Hat centré en 0 et soient $a, b \in \mathbb{R}^+$,
on peut déformer localement \mathcal{T} en un pavage valide \mathcal{T}' de $\text{Tile}(a, b)$.

Schéma de preuve.

- pour tout $a, b > 0$, la tuile $\text{Tile}(a, b)$ est bien définie.
- pour tout $a, b > 0$, sur $\text{Tile}(a, b)$, la somme des a -vecteurs est $\vec{0}$ et la somme des b -vecteurs est $\vec{0}$.
- une fois une origine fixée, fixer un chemin $p : 0 \rightarrow v$ pour tout sommet v .
 $f(p) :=$ mise à l'échelle du chemin, $f(v) :=$ destination de $f(p)$ depuis 0,
 $\mathcal{T}' := f(\mathcal{T})$ est bien défini.



Theorem (Monotuile)

*Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ab \neq 0$ et $a \neq b$,
la tuile $\text{Tile}(a, b)$ est une isométrie-monotuile aperiodique i.e.:*

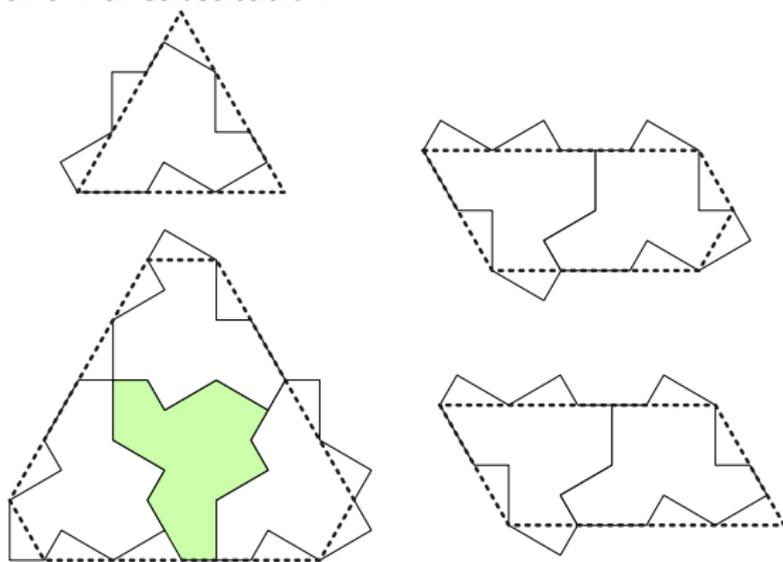
- *il existe un pavage de \mathbb{R}^2 par des copies (à isométrie près) de $\text{Tile}(a, b)$*
- *aucun des pavages de \mathbb{R}^2 par des copies (à isométrie près) de $\text{Tile}(a, b)$ n'admet de période.*

Lemma (Pavages Hat infini)

Il existe un pavage Hat infini.

Idée d'origine. réunir les tuiles en métatuiles pour définir une substitution

Problème. pas une vrai substitution

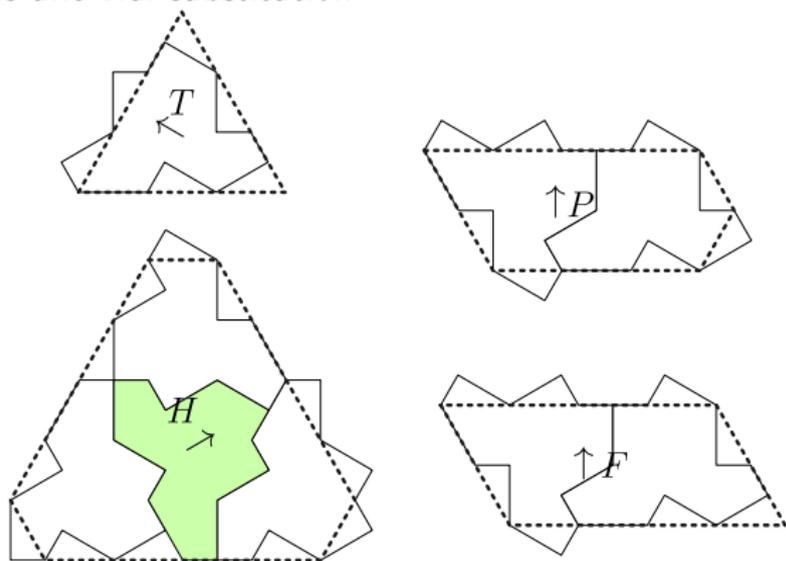


Lemma (Pavages Hat infini)

Il existe un pavage Hat infini.

Idée d'origine. réunir les tuiles en métatuiles pour définir une substitution

Problème. pas une vrai substitution

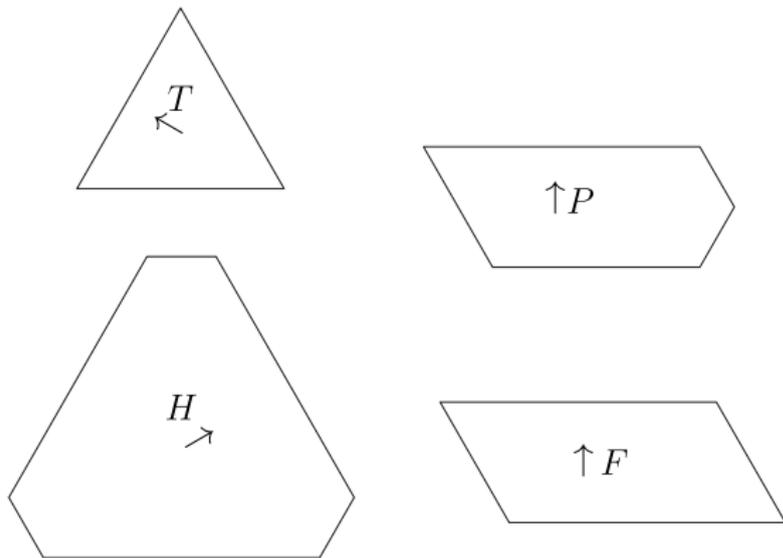


Lemma (Pavages Hat infini)

Il existe un pavage Hat infini.

Idée d'origine. réunir les tuiles en métatuiles pour définir une substitution

Problème. pas une vrai substitution

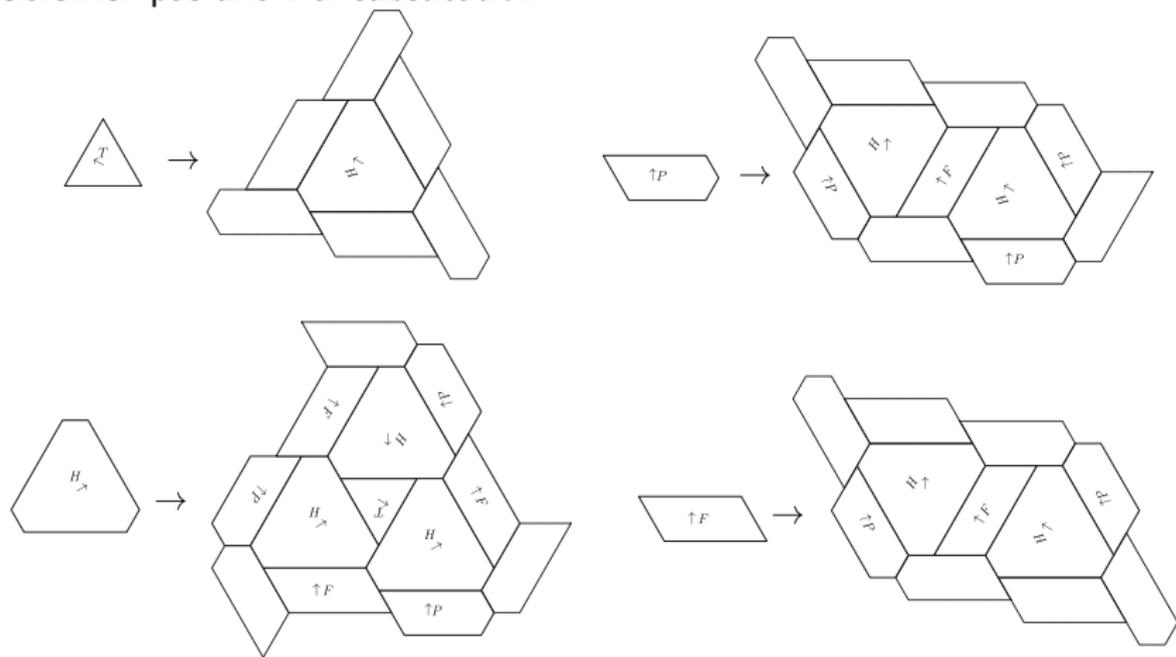


Lemma (Pavages Hat infini)

Il existe un pavage Hat infini.

Idée d'origine. réunir les tuiles en métatuiles pour définir une substitution

Problème. pas une vrai substitution

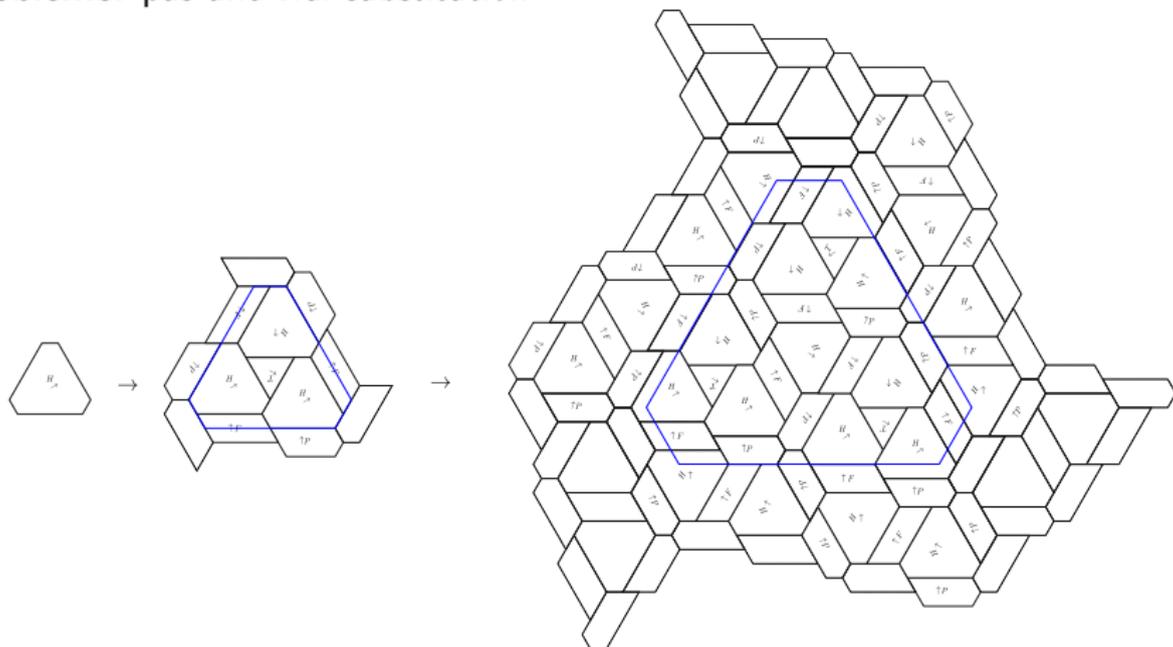


Lemma (Pavages Hat infini)

Il existe un pavage Hat infini.

Idée d'origine. réunir les tuiles en métatuiles pour définir une substitution

Problème. pas une vrai substitution

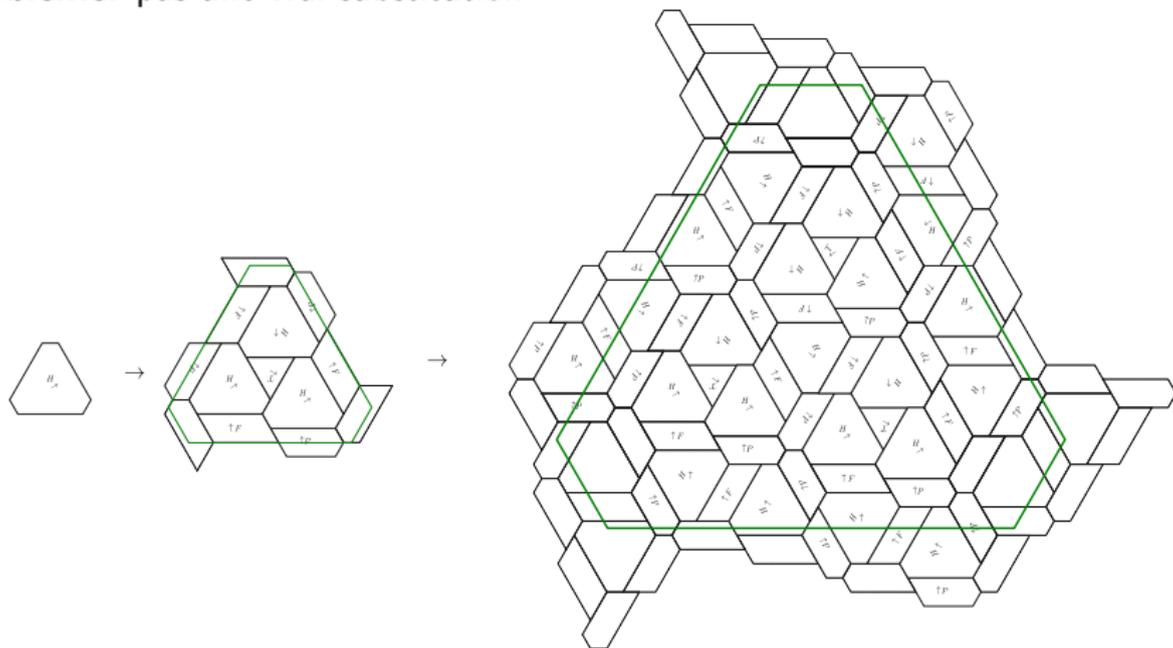


Lemma (Pavages Hat infini)

Il existe un pavage Hat infini.

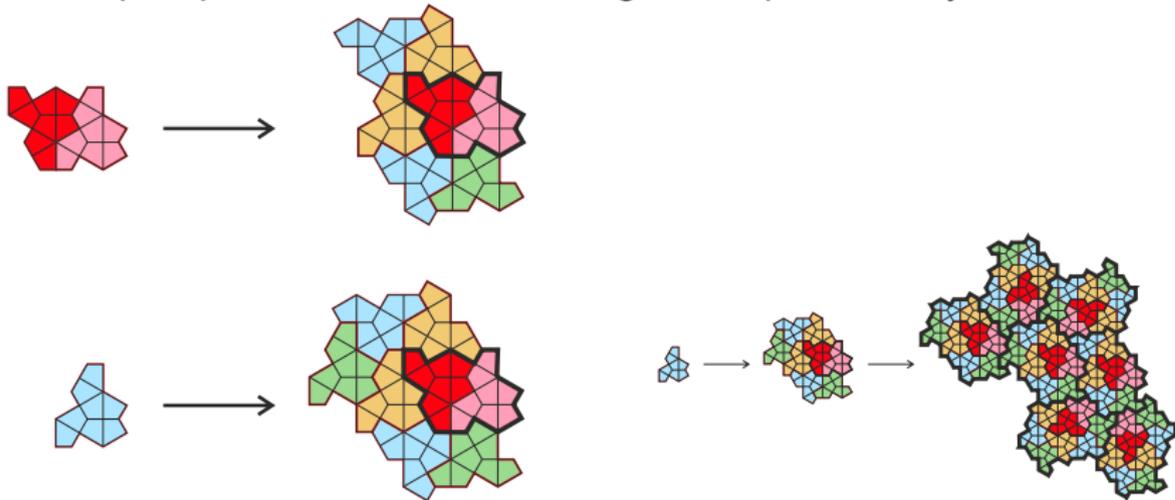
Idée d'origine. réunir les tuiles en métatuiles pour définir une substitution

Problème. pas une vrai substitution



Pavage infini II

Idée. qui à pas avoir une substitution géométrique, autant y aller à fond.



Lemma (Absence de période)

Il n'existe pas de pavage Hat périodique.

Plan de preuve.

- 1 un pavage Hat peut être déformé en n'importe quel pavage $\text{Tile}(a, b)$, en particulier en Chevron
- 2 un pavage Hat est une partition d'une grille KiteGrid sous-jacente
- 3 si \mathcal{T} est un pavage Hat périodique et f la transformation $\text{Hat} \rightarrow \text{Chevron}$ alors f induit une similitude \hat{f} d'expansion $c = \sqrt{2}^{-1}$ telle que $\hat{f}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}'$
- 4 une similitude de facteur $\sqrt{2}^{-1}$ ne peut pas envoyer un pavage Hat sur un pavage Chevron

Point clé : f induit une similitude \hat{f} d'expansion $c = \sqrt{2}^{-1}$

Contexte. \mathcal{T} : pavage Hat, f : transformation Hat \rightarrow Chevron et $\mathcal{T}' := f(\mathcal{T})$.

Hypothèse. \mathcal{T} est fortement périodique, périodes $\mathcal{P} := \{i\vec{p} + j\vec{q}, \}$

Conclusion 1. $f|_{\mathcal{P}}$ est une application linéaire.

Preuve. slide suivante

Corollaire. il existe \hat{f} application linéaire sur \mathbb{R}^2 tq $\hat{f}|_{\mathcal{P}} = f|_{\mathcal{P}}$

Conclusion 2. \hat{f} est une similitude

Conclusion 3. le facteur d'expansion \hat{f} est $\sqrt{2}^{-1}$

Preuve. le ratio d'aire entre Hat et Chevron est 2

Lemma

$f|_{\mathcal{P}}$ est une application linéaire

$\mathcal{V} :=$ vertices of \mathcal{T}

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{V}, \vec{r} \in \mathcal{P}, f(\vec{x} + \vec{r}) = f(\vec{x}) + f(\vec{r})$$

$$\text{Donc } f(i\vec{p} + j\vec{q}) = if(\vec{p}) + jf(\vec{q})$$

Lemma

$$\hat{f}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$$

idée.

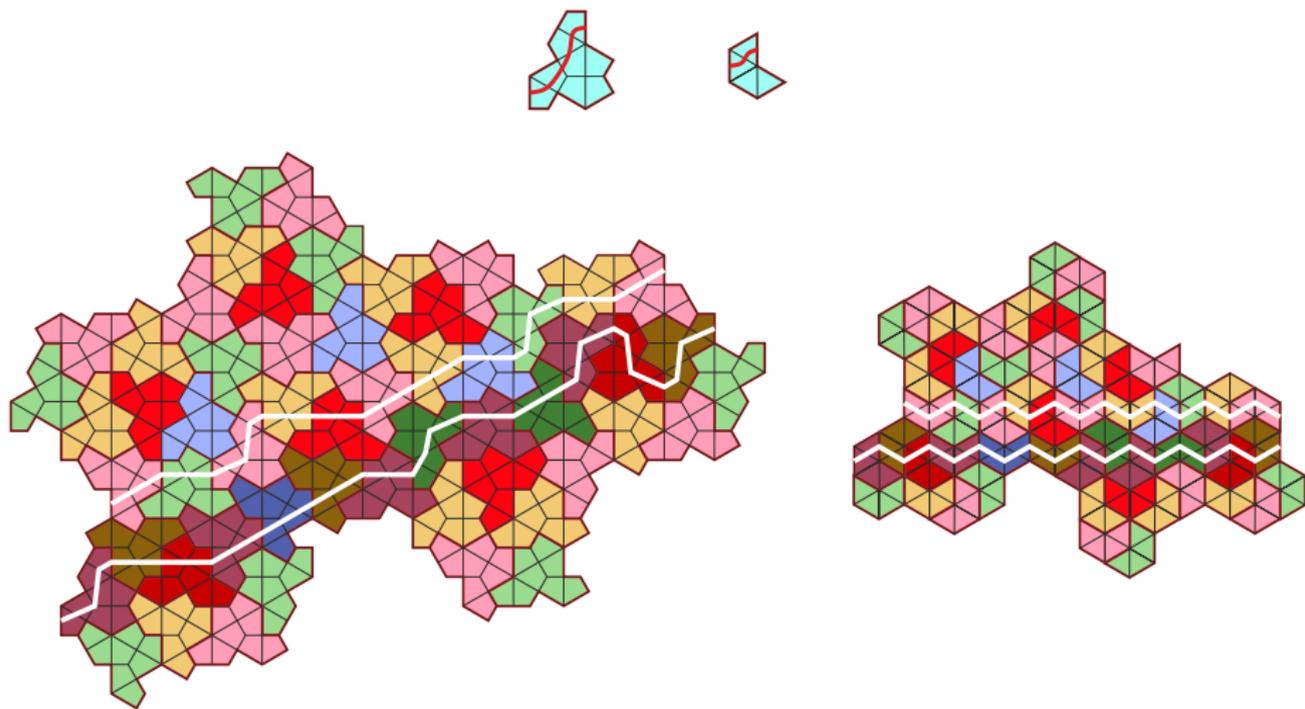
Si $\hat{f}(\mathbb{R}^2) \subsetneq \mathbb{R}^2$ alors $f(\mathcal{P}) \subset \ell$.

Si $f(\mathcal{P}) \subset \ell$ alors toutes deux tuiles telles que $t_2 = \tau(t_1)$ satisfont $f(t_1) - f(t_2) \in \ell$.

Cependant il y a un nombre fini de classes de transitivité dans un pavage périodique et un nombre infini de ℓ -lignes dans un pavage par chevrons.

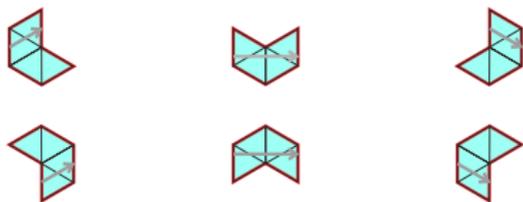
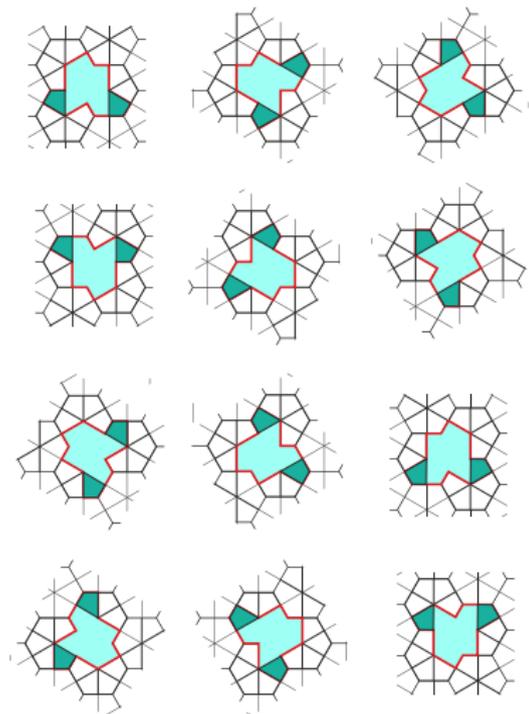
Definition. i -chaîne ($i \in \{1, 2, 3\}$)

Definition. u_i vecteur directeur de la ligne i , $v_i = u_i^\perp$



i -largeur moyenne des tuiles sur les i -chaîne

Lemme. les trois orientations des tuiles sont équiréparties



Corrolaire. i -largeur des Hat = $2D$,

i -largeur moyenne des Chevron = $\frac{4}{3}D$

Lemma

Les symétries translationnelles τ de \mathcal{T} envoient les i -chaines sur des i -chaines.

Lemma

Pour toute i -chaîne χ , il existe une symétrie translationnelle τ de \mathcal{T} qui préserve χ c'est à dire telle que $\tau(\chi) = \chi$.

Lemma

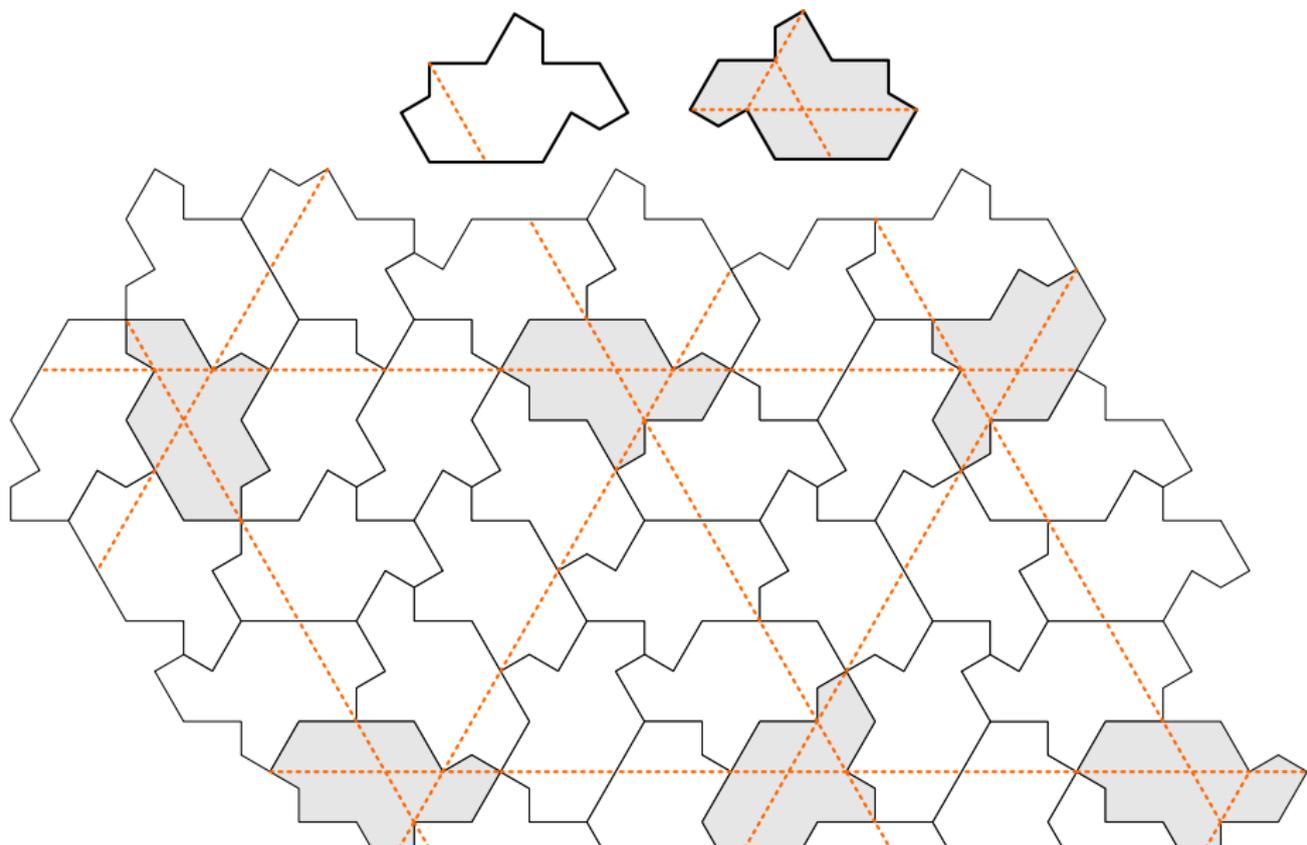
Pour tout i , il existe une symétrie translationnelle τ_i de \mathcal{T} qui préserve les i -chaines.

τ_i est la translation de vecteur $\vec{p}_i := x_i \vec{v}_i + y_i \vec{u}_i$, que l'on choisit tel que $x_1 = x_2 = x_3 = k$.

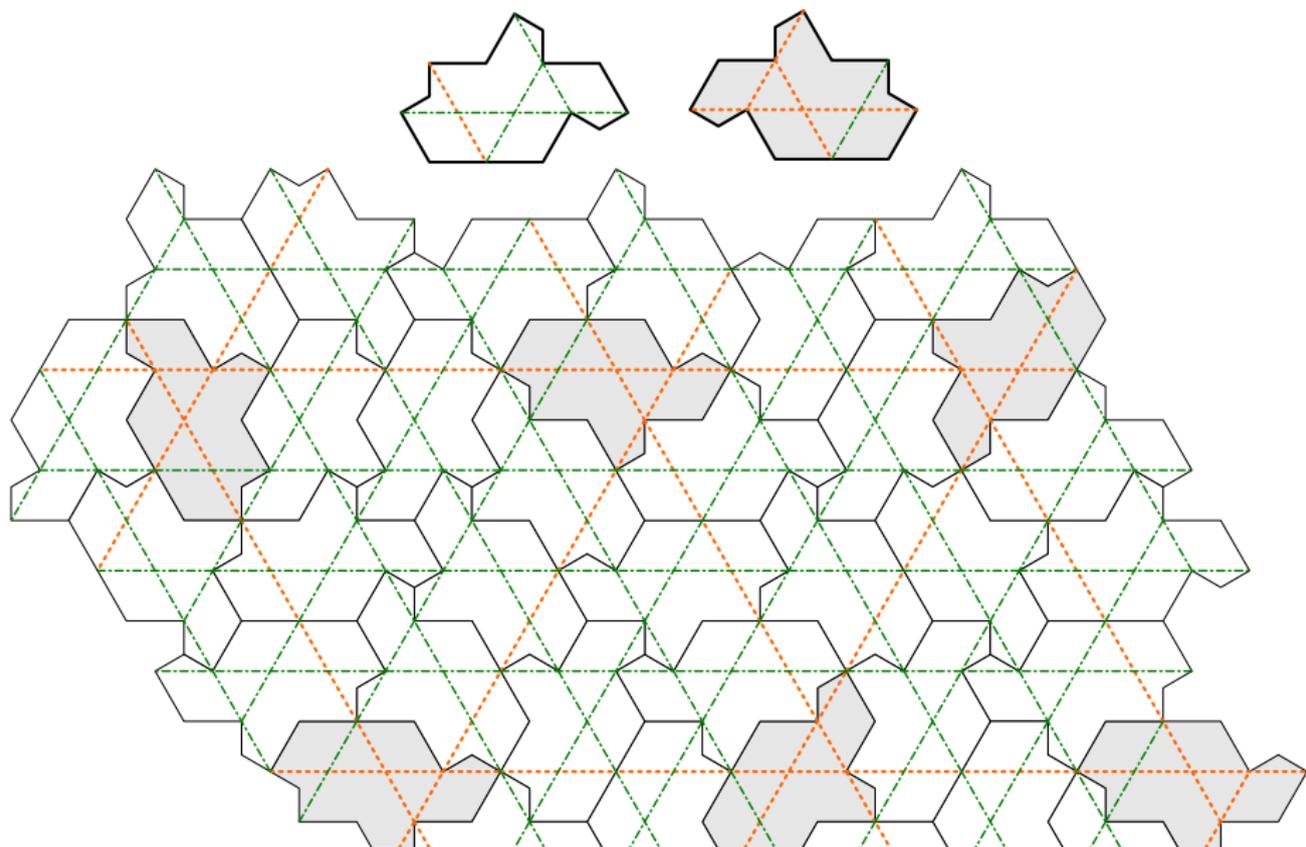
- la translation par \vec{p}_i translate les tuiles de k le long des i -chaines (de Hat)
- la translation par $\hat{f}(\vec{p}_i) = f(\vec{p}_i)$ translate les tuiles de k le long des i -chaines (de Chevron)
- donc $\hat{f}(\vec{p}_i) = k\frac{4}{3}D\vec{v}_i'$ en particulier $|\hat{f}(\vec{p}_i)|$ ne dépend pas de i
- donc $\hat{f}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) = \hat{f}(\vec{p}_1) + \hat{f}(\vec{p}_2) + \hat{f}(\vec{p}_3) = \vec{0}$ donc $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \vec{0}$
- mais puisque $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 0$ et $\vec{p}_i = k\vec{v}_i + y_i\vec{u}_i$ on a $\sum y_i\vec{u}_i = 0$ et donc $y_1 = y_2 = y_3$.

Conclusion. les \vec{p}_i génèrent \mathbb{R}^2 , sont de même longueur et leurs images sont de même longueur, *i.e.* \hat{f} est une similitude

Turtle et barres d'ammann



Turtle et barres d'ammann II



Turtle et barres d'ammann III

Theorem (Akiyama et al 2023)

La densité des barres d'ammann dans un pavage Turtle est de $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}$. Donc un pavage Turtle ne peut pas être périodique.

Idée de la preuve. On fixe un pavage Turtle \mathcal{T} .

On définit le "Kagome" K et ses "préfixes" $K(n)$.

Les barres d'Ammann de \mathcal{T} dans le cône est un sous-ensemble de K .

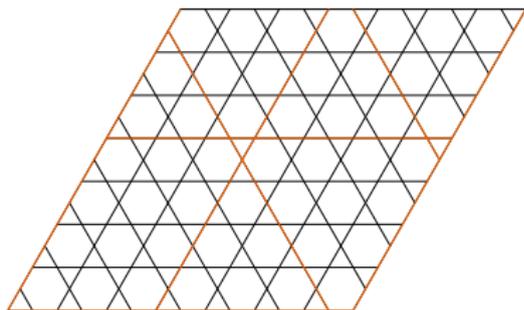
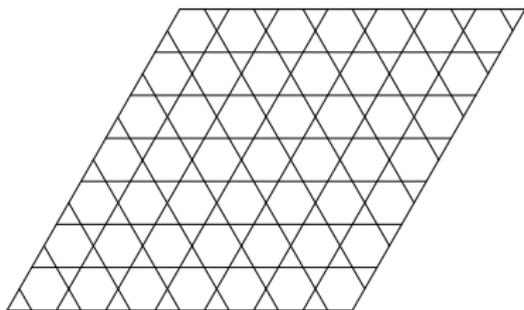
Admettant qu'il y a une densité q de barres d'Ammann dans \mathcal{T} .

On définit $\mathcal{L}_{AB}(n)$ la longueur totale des barres d'Ammann dans $K(n)$, on a:

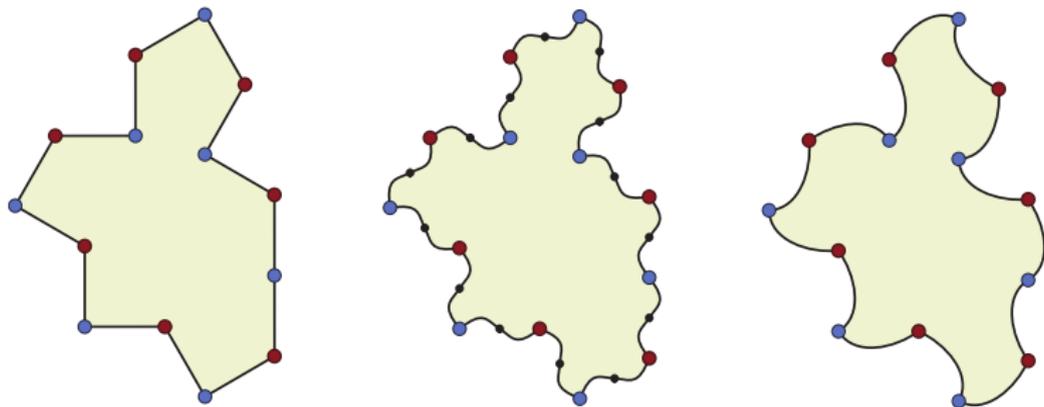
$\mathcal{L}_{AB}(n) = 3n^2q + o(n^2)$ en comptant globalement

$\mathcal{L}_{AB}(n) = (\frac{3}{5} + 3q^2)n^2 + o(n^2)$ en comptant à partir des tuiles flippées

C'est à dire que $q^2 - q + \frac{1}{5} = 0$ et donc $q = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}$.



Tile(1,1)

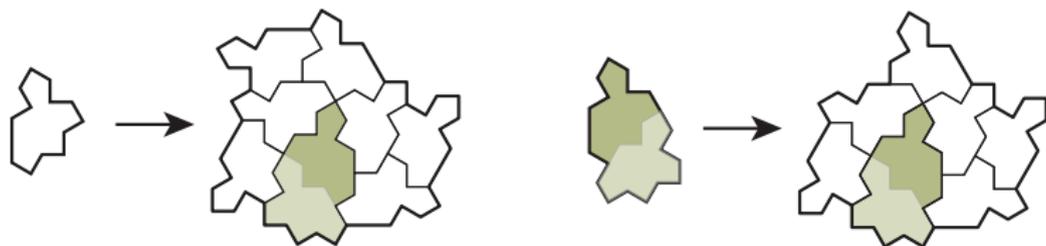


curves to force only chiral tilings

Theorem

The spectre (with no reflexion) tiles the plane and only in a non-periodic way

Substitution rule



- 1 The substitution can be iterated indefinitely (*tiles the plane*)
- 2 Any tiling by the spectre can be seen as an infinite hierarchy of supertiles (*aperiodic tile*)

Note: all the spectres are flipped a each iteration

From Spectres to hats and turtles

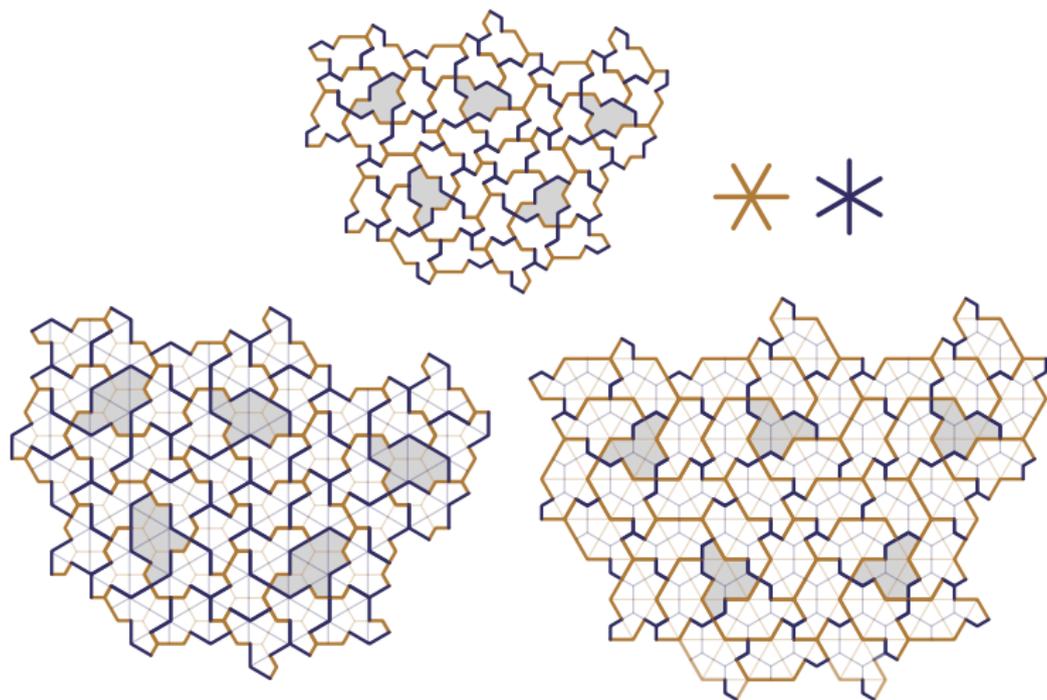
Problem: enumeration method for the hat (and turtle) need a polyform tile. The spectre is **not** a polyform.

Theorem

Any tiling by $Tile(1,1)$ is combinatorially equivalent to a tiling by unreflected hats and turtles.

→ enumerate valid patches of (unreflected) {hat, turtle} tilings.

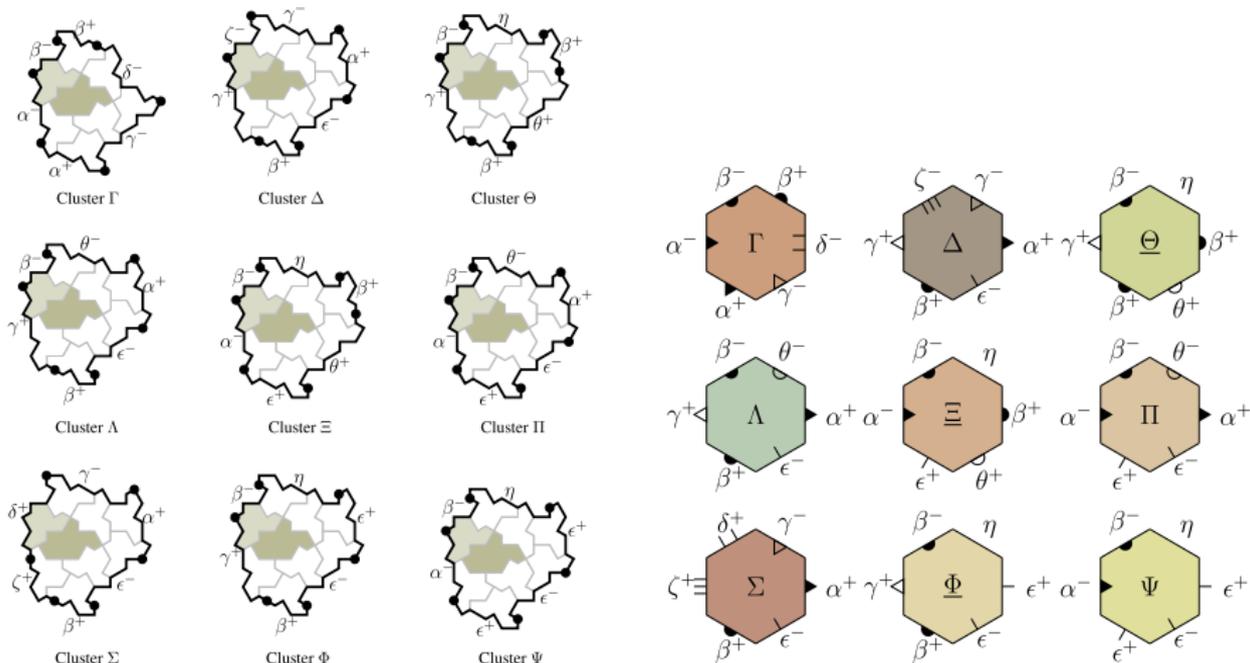
From Spectres to hats and turtles



Theorem

Any tiling by hat and turtle derived from a Spectre tiling can be decomposed into the following clusters

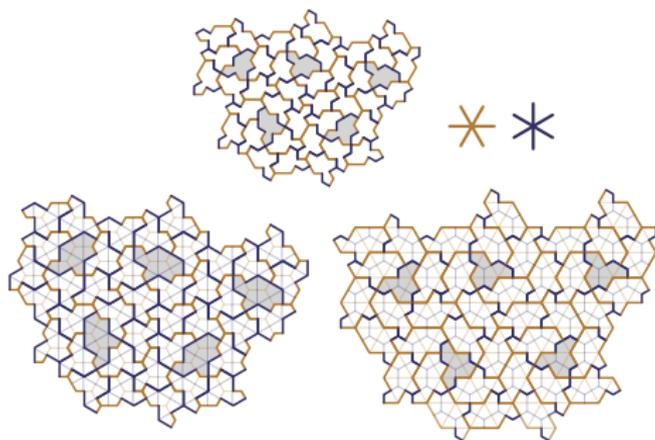
question: ils prouvent pour tous les hat-turtle ou seulement ceux issus des spectres ? (probablement sur tous les chapeau-tortue sans flip)



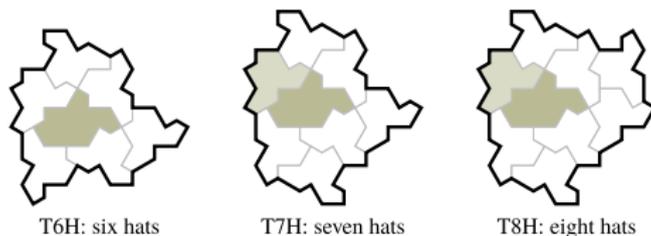
Computer-assisted Proof

- List all "extendable" pair of neighboring tiles + "same flip"
- List of all legal 1-patch of tiles
- keep only those which corona is "extendable" (thanks to the list of pairs) → **reduced 1-patches**

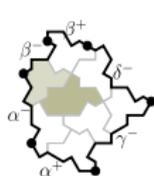
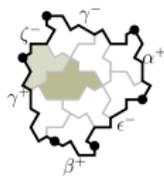
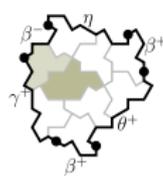
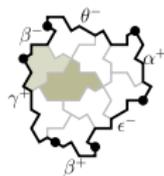
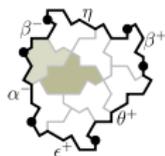
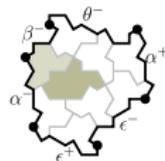
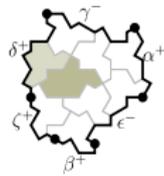
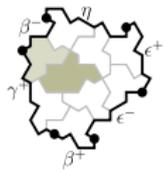
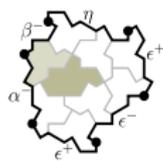
Looking at these 1-patches, notice that **every turtle is surrounded by hats with no other turtle neighbor** (or vice-versa).



Computer-assisted Proof



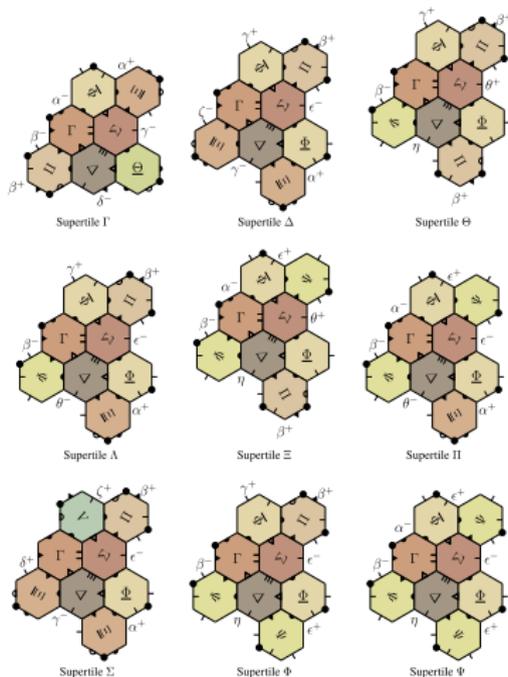
- Any tiling can be tiled by $\{ T6H, \text{hat} \}$
- \rightarrow Reduced 1-patches of tilings by $\{ T6H, \text{hat} \}$
- ...
- Any tiling can be tiled by $\{ T7H, T8H \}$
- \rightarrow Reduced 1-patches of tilings by $\{ T7H, T8H \}$
- The central tiles of these 1-patches are the 9, label the types of edges

Cluster Γ Cluster Δ Cluster Θ Cluster Λ Cluster Ξ Cluster Π Cluster Σ Cluster Φ Cluster Ψ

Structure hiérarchique

Theorem

Any tiling by marked hexagons can be decomposed into the following supertiles

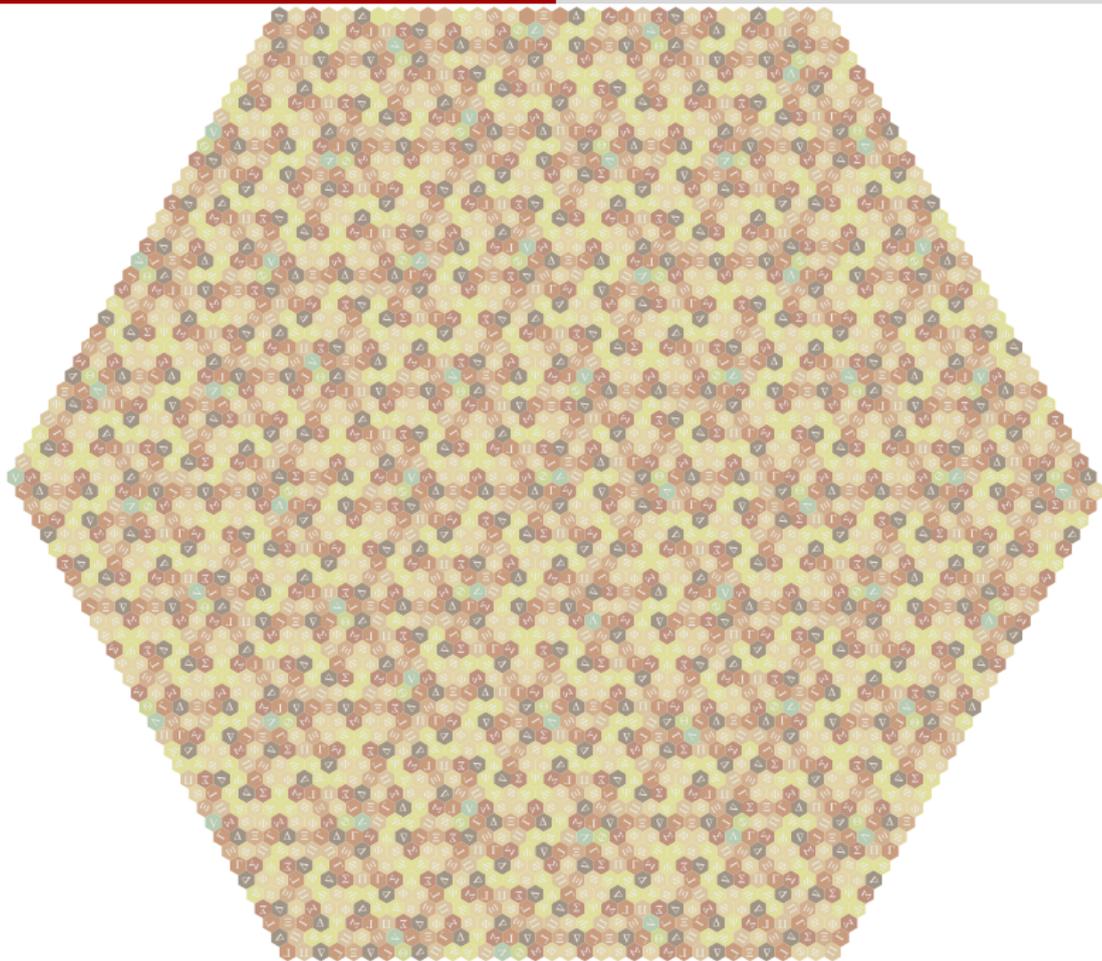


"Proof"

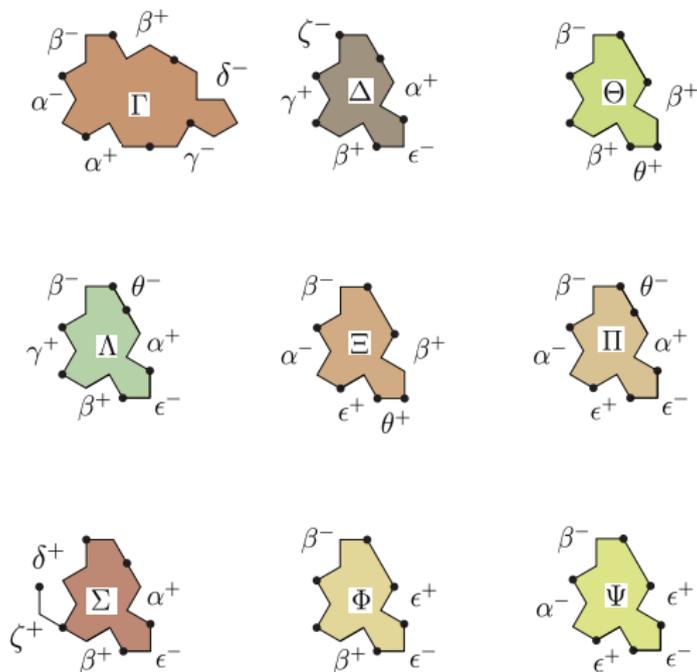
- each supertile is combinatorially equivalent to a flipped marked hexagon
- just need to show that the composition works well
- Essentially "we looked at all 5-patches, trust me"

Pavabilité

"These rules are well-defined" ...



Derive a combinatorial patch of Spectres



"By inspection, we verify that every combinatorial edge and vertex arrangement that arises in that patch can be realized geometrically"